

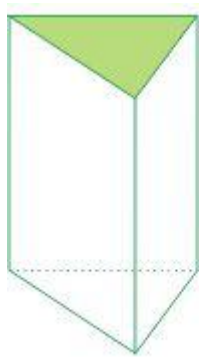
... حجم ...

حجم: (Volume)

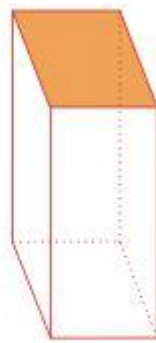
حجم در لغت به معنی برآمدگی و ستبری و جسامت چیزی می باشد و در اصطلاح هندسه گنجایش و ظرفیت جسم و آن مقداری از فضا که جسم آن را اشغال می کند، را نشان می دهد.

منشور: (Prism)

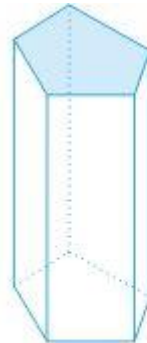
منشور در لغت به معنی پراکنده، نشر شده، زنده شده و مبعوث است و در اصطلاح هندسه نام شکلی است که دو قاعده دارد که دو چند ضلعی مساوی هستند و بدنه منشور (سطح جانبی منشور) از مستطیلهای یا متوازی الاضلاع ها تشکیل شده است.



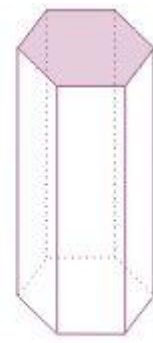
منشور ۳ پهلو



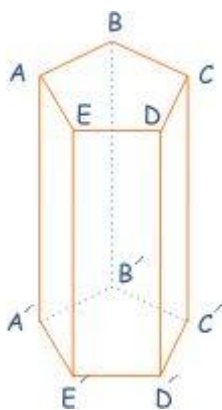
منشور ۴ پهلو



منشور ۵ پهلو



منشور ۶ پهلو



معرفی منشور ۵ پهلو:

۱ نام شکل: منشور ۵ پهلو

۲ یال های منشور: AA', BB', CC', DD', EE'

۳ وجه منشور: هر کدام از مستطیل های جانبی را یک وجه منشور می نامند.

۴ ارتفاع منشور: از آنجا که هر کدام از یال ها بر دو قاعده منشور عمود می باشند، لذا ارتفاع منشور با اندازه هر یک از یال ها برابر است.

۵ قاعده منشور: منشور دو قاعده دارد. $ABCDE$ و $A'B'C'D'E'$ که دو پنج ضلعی مساوی اند.

رابطه های مهم:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم منشور}$$

$$\text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی منشور}$$

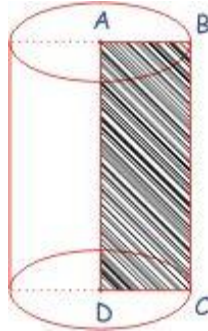
$$\text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = \text{مساحت کل منشور}$$

استوانه: (Cylinder)

نام شکلی است که دو قاعده دارد که دو دایره مساوی هستند و بر جانبی راست استوار است.



اگر مستطیل را حول طول آن دوران دهیم، شکل فضایی حاصل استوانه نامیده می شود. در این صورت طول مستطیل ارتفاع استوانه و عرض آن شعاع قاعده استوانه می باشد.



در شکل بالا مستطیل ABCD را حول طول آن دوران داده ایم و استوانه بوجود آمده است.
رابطه های مهم:

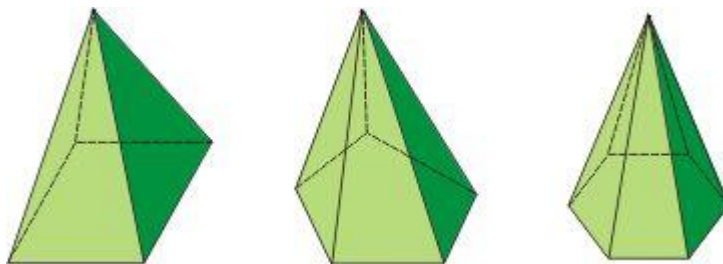
ارتفاع \times مساحت قاعده (دایره) = حجم استوانه

ارتفاع \times محیط قاعده (دایره) = مساحت جانبی استوانه

مساحت دو قاعده + مساحت جانبی = مساحت کل استوانه

هرم: (pyramid)

هرم در لغت به معنی سخت پیر گردیدن و کلان سال شدن است و در اصطلاح هندسه حجمی است که قاعده آن یک چند ضلعی و وجوه جانبی اش مثلثهایی باشند که همه به یک رأس مشترک (رأس هرم) منتهی می شوند.



معرفی هرم منتظم:

آ نام شکل: هرم منتظم.

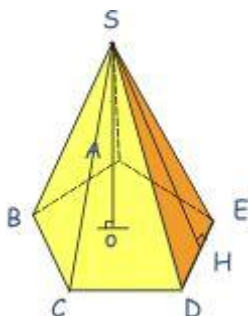
آ رأس هرم: نقطه S

آ ارتفاع هرم: پاره خطی است که از رأس هرم به مرکز قاعده ی هرم عمود است (SO)

آ قاعده هرم: پنج ضلعی منتظم ABCDE

آ سهم هرم: ارتفاع مثلث های جانبی، ارتفاع هر وجه جانبی هرم منتظم (SH).

آ وجه هرم: هر یک از مثلث هایی که بدنه هرم را می پوشانند را یک وجه جانبی می نامیم.



آ بال هرم: محل تقاطع هر دو وجه جانبی را بال هرم می نامیم. SE, SD, SC, SB, SA

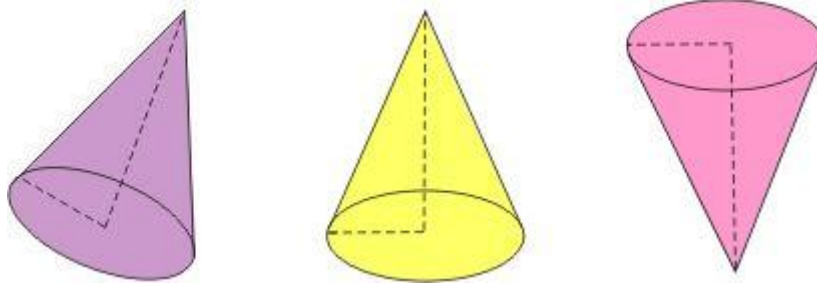
رابطه های مهم:

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

$$\text{سهم} \times \text{محیط قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{مساحت جانبی هرم منظم}$$

مخروط : (cone)

مخروط به معنی خراشیده شده ، تراشیده شده و خراطی شده است و در اصطلاح هندسه حجمی است که از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع آن به دست می آید . کله قند و کلاه بوقی نمونه هایی به شکل مخروط هستند.

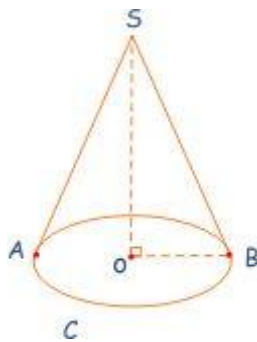


معرفی مخروط :

آ نام شکل : مخروط

آ رأس : نقطه ی s

آ ارتفاع : پاره خط SO ضلعی که مثلث قائم الزاویه را حول آن دوران داده ایم تا مخروط بوجود آید.



پاره خطی است که از رأس مخروط بر صفحه ی قاعده ی آن عمود است .

آ قاعده ی مخروط : دایره c به مرکز O و شعاع OB را قاعده ی مخروط می نامیم.

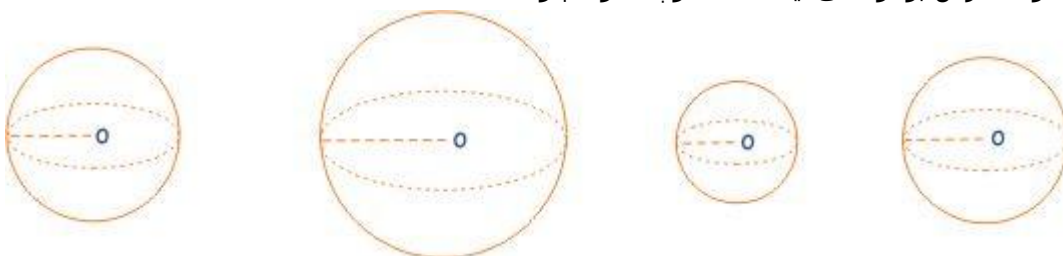
آ مولد مخروط : پاره خط SA یا SB ، وتر مثلث قائم الزاویه که مخروط را بوجود آورده است.

رابطه های مهم :

$$\text{مولد} \times \text{محیط قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{مساحت جانبی مخروط}$$

کره : (sphere)

کره به معنی گوی و آن چه که به شکل گوی باشد، است و در اصطلاح هندسه شکلی است که از دوران نیم دایره حول قطرش بوجود می آید . مانند توپ ، گوی چوگان

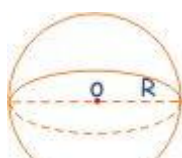


معرفی کره :

آ مرکز کره : نقطه ی O

آ شعاع کره : R (فاصله ی نقاط روی سطح کره از مرکز کره)

آ دایره ی عظیمه : اگر یک کره را نصف کنیم، دایره ای که از نصف کردن کره بدست می آید،





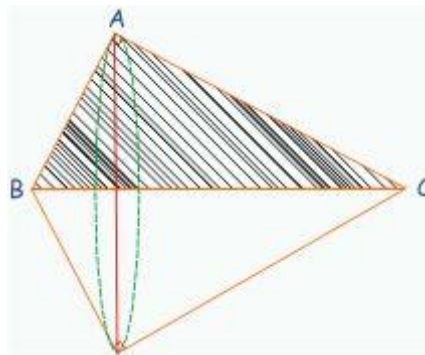
رابطه های مهم :

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2$$

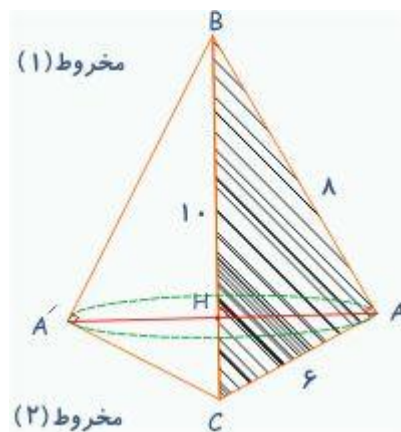
نکات المپیادها

۱- اگر مثلث قائم الزاویه ای را حول وترش دوران دهیم ، دو مخروط پدید می آید که قاعده های آن ها بر هم منطبق اند.



مثال: مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع ۶ ، ۸ ، ۱۰ ، را حول وتر این مثلث دوران می دهیم . حجم جسم حاصل را حساب کنید .

حل:



$$AB \times AC = AH \times BC$$

$$8 \times 6 = AH \times 10$$

$$AH = \frac{48}{10} = 4.8 \quad \text{شعاع دایره}$$

حجم مخروط (۲) + حجم مخروط (۱) = حجم شکل

$$= \frac{1}{3} (\pi r^2) h_1 + \frac{1}{3} (\pi r^2) h_2$$

$$= \frac{1}{3} (\pi r^2) (h_1 + h_2)$$

$$= \frac{1}{3} \times (\pi (4.8)^2) \times (10)$$

$$= \frac{1}{3} (4.8)^2 \times 10 \times \pi = 76.8 \pi$$


بنابراین مساحت کره جدید ۲۵ برابر می شود.

۲- با توجه به دستور محاسبه ی مساحت کره $(4 \pi r^2)$ مشخص می شود که اگر شعاع کره ای را a

برابر کنیم مساحت آن a^2 برابر می شود.

مثال: اگر شعاع کره ای را ۵ برابر کنیم ، مساحت آن چه تغییری می کند؟

حل:



مساحت کره قدیمی $= 4\pi r^2$ و مساحت کره جدید $= 4\pi (ar)^2 = 4\pi a^2 r^2$

\Rightarrow مساحت کره جدید $= 4\pi (5r)^2 = 4\pi \times 25 \times r^2$


\Rightarrow مساحت کره جدید $= 25 \times 4\pi r^2$

۲- با توجه به دستور محاسبه ی حجم کره $(\frac{4}{3}\pi r^3)$ مشخص می شود که اگر شعاع کره ای را a

برابر کنیم، حجم آن a^3 برابر می شود.

مثال: اگر شعاع کره ای را ۳ برابر کنیم ، حجم آن چه تغییری می کند؟

حل:



حجم کره قدیمی $= \frac{4}{3}\pi r^3$ و حجم کره جدید $= \frac{4}{3}\pi (ar)^3 = \frac{4}{3}\pi a^3 r^3$

\Rightarrow حجم کره جدید $= \frac{4}{3}\pi r^3 \times (3)^3$

\Rightarrow حجم کره جدید $= \frac{4}{3}\pi r^3 \times 27$

یعنی حجم کره ی جدید ۲۷ برابر حجم کره ی قدیمی می باشد.

۴- اگر مکعبی را در یک کره محاط کنیم ، قطر مکعب با قطر کره مساوی است .

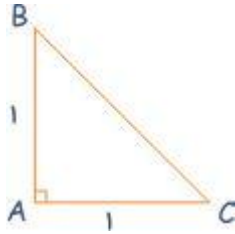
۵- از دوران یک ذوزنقه ی قائم الزاویه حول ساق قائم ، مخروط ناقصی پدید می آید که حجم آن از دستور زیر قابل محاسبه است:



$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + R^2 + RR)$$

پ تست ۱ : پاسخ

مثلث ABC را حول وتر BC دوران می دهیم. حجم شکل حاصل برابر است با : ($\pi=3$)



- (الف) $2\sqrt{2}$
- (ب) $\sqrt{2}$
- (ج) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پ تست ۲ : پاسخ

اگر شعاع قاعده ی یک مخروط را دو برابر و ارتفاع آن را ۳ برابر کنیم ، حجم مخروط چند برابر خواهد شد؟

- (الف) ۴ برابر
- (ب) ۶ برابر
- (ج) ۱۲ برابر
- (د) ۸ برابر

پ تست ۳ : پاسخ

اگر شعاع قاعده ی استوانه ای را ۳ برابر و ارتفاع آن را ثلث کنیم ، حجم استوانه حاصل

- (الف) ثلث می شود
- (ب) ۳ برابر می شود
- (ج) تغییر نمی کند
- (د) ۹ برابر می شود

پ تست ۴ : پاسخ

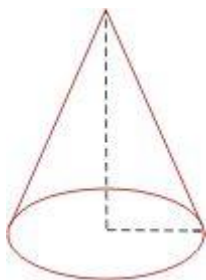
در کره ای به شعاع $\sqrt{3}$ یک مکعب محاط شده است . نسبت حجم این کره به مکعب چند است؟

- (الف) $\frac{\pi}{2}$
- (ب) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$
- (ج) $\frac{\pi}{6}$
- (د) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

پ تست ۵ : پاسخ

گسترده ی سطح جانبی یک مخروط دوار نیم دایره است.

زاویه ی مولد این مخروط با ارتفاع آن چند درجه است؟

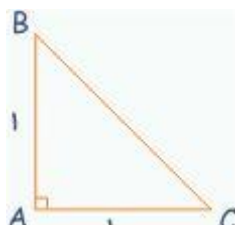


- (الف) 30°
- (ب) 45°
- (ج) 60°
- (د) 15°

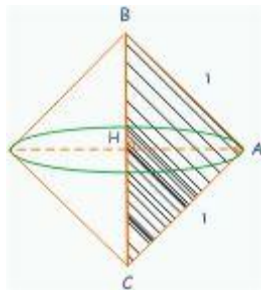
جواب تست ها

پ تست ۱ :

مثلث ABC را حول وتر BC دوران می دهیم. حجم شکل حاصل برابر است با : ($\pi=3$)



- (الف) $2\sqrt{2}$
- (ب) $\sqrt{2}$
- (ج) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
- (د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$



حل: گزینه ی د صحیح است.

شکل از دو مخروط مساوی درست شده است.

کافی است یکی از مخروط ها را حساب کنیم و آن را دو برابر کنیم.

$$BH = ? \quad AH = ?$$

بنابر رابطه ی فیثاغورس در مثلث $\triangle ABC$ می توان نوشت:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow BC = \sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{2} \Rightarrow AH = BH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{حجم مخروط} = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{حجم شکل} = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پ تست ۲:

اگر شعاع قاعده ی یک مخروط را دو برابر و ارتفاع آن را ۳ برابر کنیم، حجم مخروط چند برابر خواهد شد؟

(الف) ۴ برابر (ب) ۶ برابر (ج) ۱۲ برابر (د) ۸ برابر

حل: گزینه ی ج صحیح است.

$$\begin{aligned} \text{حجم مخروط قدیمی} &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ \text{حجم مخروط جدید} &= \frac{1}{3} \pi (2r)^2 (3h) = \frac{1}{3} \pi \times 4 \times r^2 \times 3 \times h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \times 12 \end{aligned}$$

یعنی حجم مخروط جدید ۱۲ برابر مخروط قدیمی می باشد.

تذکر: راه حل سریع این تست به صورت زیر می باشد:

$$r = 2 \text{ و } h = 3 \text{ و } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \Rightarrow 2^2 \times 3 = 12$$

ابتدا دستور محاسبه را می نویسیم، سپس نسبت های تغییر یافته را به جای خود قرار می دهیم و سایر مقادیری را که تغییر نمی کنند حذف می کنیم، عدد بدست آمده نسبت وضعیت جدید به وضعیت قبلی را مشخص می کند.

پ تست ۲:

اگر شعاع قاعده ی استوانه ای را ۳ برابر و ارتفاع آن را ثلث کنیم، حجم استوانه حاصل چند برابر خواهد شد؟

(الف) ثلث می شود (ب) ۳ برابر می شود (ج) تغییر نمی کند (د) ۹ برابر می شود

حل: گزینه ی ب صحیح است .

$$r = 3 \text{ و } h = \frac{1}{3} \text{ و } V = \pi r^2 h$$
$$\Rightarrow 3^2 \times \frac{1}{3} = 3$$

پ تست ۴:

در کره ای به شعاع $\sqrt{3}$ یک مکعب محاط شده است . نسبت حجم این کره به مکعب چند است؟

(د) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

(ج) $\frac{\pi}{6}$

(ب) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

(الف) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ی د صحیح است.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \times \sqrt{3}^3 = 4\pi\sqrt{3}$$
$$\text{قطر مکعب} = \text{قطر کره} \Rightarrow \text{قطر مکعب} = 2\sqrt{3}$$
$$\text{اندازه ضلع مکعب} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a=2$$
$$a=2 \Rightarrow \text{حجم مکعب} = 2^3 = 8$$
$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$

پ تست ۵:

در کره ای به شعاع $\sqrt{3}$ یک مکعب محاط شده است . نسبت حجم این کره به مکعب چند است؟

(د) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$

(ج) $\frac{\pi}{6}$

(ب) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

(الف) $\frac{\pi}{2}$

حل: گزینه ی د صحیح است.

$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \times \sqrt{3}^3 = 4\pi\sqrt{3}$$
$$\text{قطر مکعب} = \text{قطر کره} \Rightarrow \text{قطر مکعب} = 2\sqrt{3}$$
$$\text{اندازه ضلع مکعب} = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \sqrt{a^2+a^2+a^2} = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow a=2$$
$$a=2 \Rightarrow \text{حجم مکعب} = 2^3 = 8$$
$$\frac{\text{حجم کره}}{\text{حجم مکعب}} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2} \pi$$

پ تست ۵:

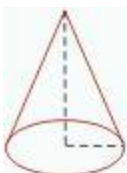
گسترده ی سطح جانبی یک مخروط دوار نیم دایره است . زاویه ی مولد این مخروط با ارتفاع آن چند درجه است؟

(ب) 45°

(الف) 30°

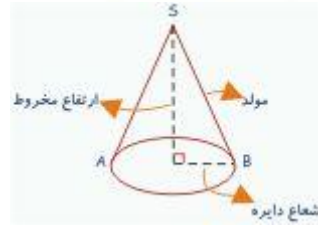
(د) 15°

(ج) 60°



حل: گزینه ی الف صحیح است .

می دانیم: مولد \times محیط قاعده $\times \frac{1}{3} =$ مساحت جانبی مخروط



حال مخروط را بروی صفحه می گسترانیم:



اما مساحت جانبی مخروط با مساحت نیم دایره برابر است. بنابراین می توان نوشت:

$$\pi (\text{مولد مخروط}) \times \text{شعاع قاعده} \times \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2} \times (\text{مولد مخروط})^2$$

$$\Rightarrow \text{شعاع قاعده} = \frac{1}{3} \times (\text{مولد مخروط})$$

از طرفی می دانیم در مثلث قائم الزاویه ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است. یعنی زاویه 30° بین شعاع قاعده و مولد مخروط برابر است.

آدرس لینک صفحه : www.olympiadelmi.ir/riazi/3/17/riazi-3-17.htm

اجرا و پشتیبانی توسط مؤسسه فناوری اطلاعات کاشف