

... تشابه ...

تشابه: (similarity)

تشابه به معنی به هم مانند بودن و به یکدیگر شبیه بودن می باشد. دو تصویر که از یک منظره تهیه شده اند ولی از لحاظ اندازه ها با هم تفاوت دارند، دو تصویر مشابهند.



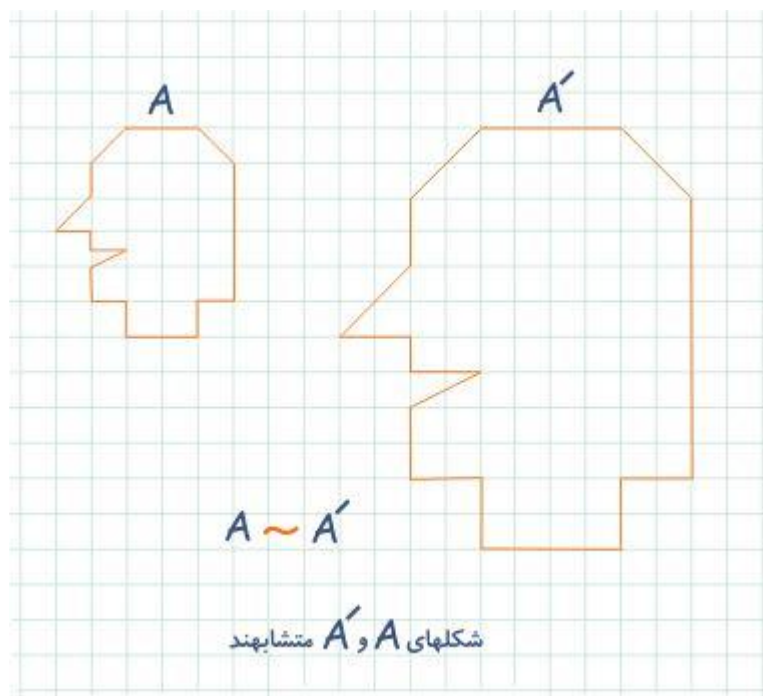
پانتوگراف: (نقاله متحرک)

نام وسیله ای است که برای رسم شکل‌های متشابه از آن استفاده می شود.



نماد تشابه: برای نمایش تشابه دو شکل از نماد \sim استفاده می شود.

اگر شکل A و A' متشابه باشند، می نویسیم: $A \sim A'$



نسبت تشابه: عددی است که تغییرات بزرگی یا کوچکی اندازه های اضلاع دو شکل متشابه را نشان می

دهد. این عدد همان نسبت اجزای متناظر در دو شکل متشابه می باشد. در تصویر بالا مشاهده می کنیم که هر یک از اضلاع شکل A دو برابر شده اند، عدد ۲ یا $\frac{1}{2}$ را نسبت تشابه این دو شکل می گوئیم.

کاربردهای تشابه: نقشه هر مکان با آن مکان متشابه است. ماکت یک ساختمان با آن ساختمان متشابه است. مهندسين راه و ساختمان محاسبات لازم را برای ساختن یک مکان بروی ماکت آن انجام می دهند و پس از مشخص شدن تمامی جزئیات اقدام به ساخت آن می کنند. امروزه متخصصان علم شبیه سازی علوم پزشکی، در کشور عزیزمان ایران به پیشرفتهای قابل توجهی دست یافته اند به طوریکه بعضی از اعضای بدن انسان را در محیط های شبیه سازی شده، تولید می کنند. در علوم کامپیوتر نرم افزارهای طراحی شده قادرند تصاویر قدیمی را بازسازی کرده و در اندازه های مختلف و به تعداد دلخواه تکثیر کنند. در ریاضیات شرایط لازم برای تشابه دوچند ضلعی را بررسی کرده و سپس به کمک نسبت تشابه مقادیر نامعلوم را محاسبه می کنیم. تناسب اضلاع دو چند ضلعی متشابه به ما کمک می کند روابط زیبایی را در اشکال هندسی به دست آوریم این رابطه های مهم در شکل های هندسی هستند که به ایجاد یک نرم افزار، ایجاد یک محیط شبیه سازی شده، رسم نقشه یک مکان، ساخت دقیق یک ماکت ساختمان و ... کمک می کنند.

تشابه دو n ضلعی: دو n ضلعی در صورتی متشابه اند که:

۱- زاویه هایشان دو به دو مساوی باشند.

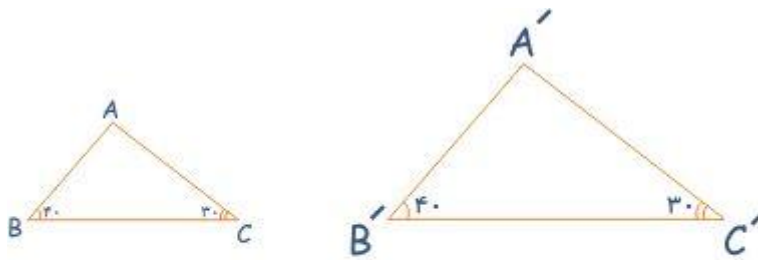
۲- اضلاعشان متناسب باشند.

مثال: دو مربع دلخواه متشابهند. اگر دو مستطیل دارای طول ها و عرض های متناسب باشند، متشابهند اگر زوایای نظیر دو لوزی مساوی باشند، متشابهند.



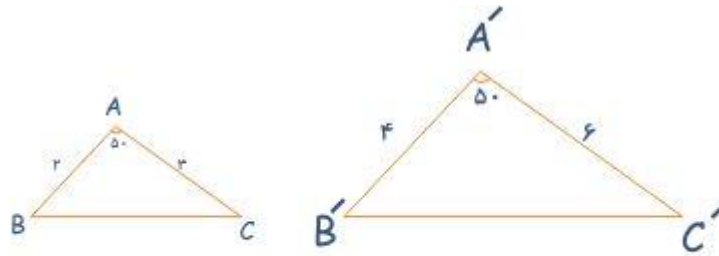
تشابه دو مثلث:

۱- اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.



$$\left(\begin{matrix} \hat{B} = \hat{B}' = 30^\circ \\ \hat{C} = \hat{C}' = 30^\circ \end{matrix} \right) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

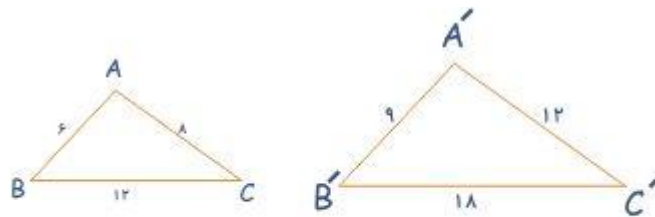
۲- اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه های بین آنها متساوی باشند، آن دو مثلث متشابهند.



$$\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\left(\angle A = \angle A' = 50^\circ \right)$$

۲- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند آن دو مثلث متشابهند.

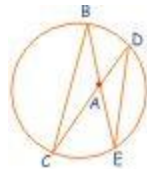


$$\left(\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{3} \right) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

شکلهای متشابه: ملاحظه کردیم که تشابه، طول پاره خطها را به یک نسبت بزرگ یا کوچک می کند، اما اندازه زاویه ها را تغییر نمی دهد. با نوشتن تناسب اضلاع دو شکل متشابه می توان رابطه های مهمی را نتیجه گرفت. این رابطه های مهم علاوه بر محاسبه مقادیر نامعلوم کاربردهای فراوان در ریاضیات و سایر علوم دارند.

مثال:

۱- ثابت کنید دو مثلث ABC و ADE متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:

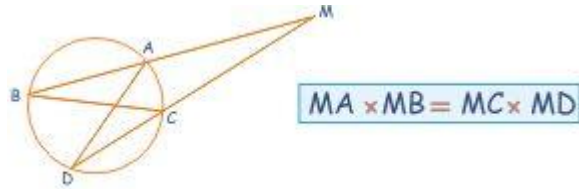


$$AB \times AE = AD \times AC$$

$$\left(\begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \text{ زوایای محاطی و مقابل به یک کمان} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ متقابل به رأس} \end{array} \right) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ADE$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} AB \times AE = AD \times AC$$

۲- ثابت کنید دو مثلث MAD و MBC متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:

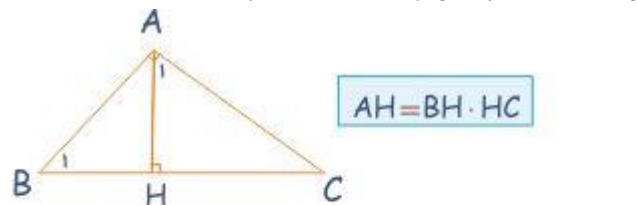


$$\left(\begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{در هر دو مشترک} \\ \text{زوایای محاطی و مقابل به یک کمان} \end{array} \Rightarrow \triangle MBC \sim \triangle MAD$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} = \frac{AD}{BC} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} MA \times MB = MC \times MD$$

۳- ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC است.

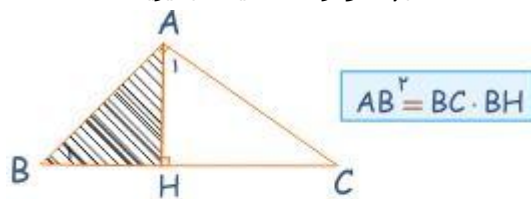
ثابت کنید دو مثلث AHB و AHC متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:



$$\left(\begin{array}{l} \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ \\ \hat{B}_1 = \hat{A}_1 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{هر دو متمم زاویه ی C هستند} \\ \end{array} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle AHC$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} AH^2 = BH \times HC$$

۴- ثابت کنید دو مثلث ABC و AHB متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:



$$\left(\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{H}_1 = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array} \right. \begin{array}{l} \\ \text{مشترک} \end{array} \Rightarrow \triangle AHB \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} = \frac{AH}{AC} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} AB \times AB = BC \times BH \Rightarrow AB^2 = BC \times BH$$

۵- ثابت کنید دو مثلث ABC و AHC متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:

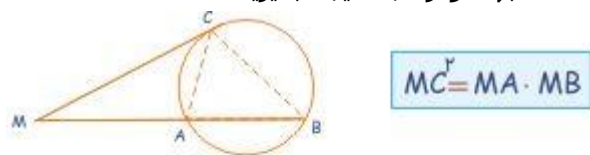


$$\left(\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \end{array} \right) \Rightarrow \triangle AHC \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} = \frac{AH}{AB} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} AC \times AC = BC \times CH \Rightarrow AC^2 = BC \times CH$$

۶- در شکل زیر MC بر دایره مماس است.

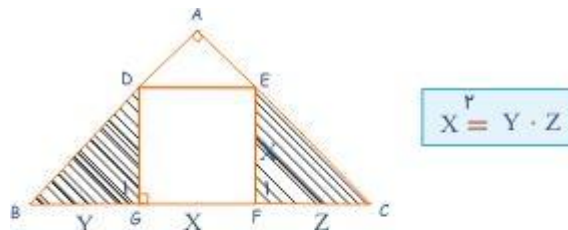
ثابت کنید دو مثلث MAC و MBC متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:



$$\left(\begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} = 90^\circ \\ \hat{B} = \frac{1}{2} \hat{AC} \\ \hat{MCA} = \frac{1}{2} \hat{AC} \end{array} \right) \Rightarrow \hat{MCA} = \hat{MBC} \Rightarrow \triangle MAC \sim \triangle MBC$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MB} = \frac{MA}{MC} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} MC \times MC = MA \times MB \Rightarrow MC^2 = MA \times MB$$

۷- با توجه به شکل زیر ثابت کنید دو مثلث BDG و CEF با هم متشابهند و از آنجا نتیجه بگیرید:



$$\left(\begin{array}{l} \hat{G} = \hat{F} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{E} \text{ هر دو متمم C هستند} \end{array} \right) \Rightarrow \triangle BDG \sim \triangle CEF$$

$$\Rightarrow \frac{DG}{FC} = \frac{BG}{EF} = \frac{BD}{EC} \xrightarrow{\text{خاصیت طرفین وسطین}} DG \times EF = FC \times BG \Rightarrow X \times X = Y \times Z \Rightarrow X^2 = Y \times Z$$

۱- نسبت محیط های دو شکل متشابه با نسبت تشابه دو شکل برابر است.

مثال: اگر نسبت تشابه دو مثلث k باشد، نسبت محیط های آن ها کدام است؟

الف) k^2 (ب) k (ج) $2k$ (د)

حل: گزینه ب صحیح است.

۲- نسبت مساحت های دو شکل متشابه با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال: اگر نسبت تشابه دو مثلث $\frac{3}{4}$ باشد، نسبت مساحت های آن ها کدام است؟

الف) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{9}{4}$ (ج) $\frac{3}{16}$ (د) $\frac{9}{16}$

حل: گزینه د صحیح است.

۳- نسبت ارتفاع ها، نیمسازها، میانه ها و قطرهای متناظر دو شکل متشابه با نسبت تشابه برابر است.

مثال: نسبت مساحت های دو دوزنقه متشابه $\frac{1}{9}$ است. نسبت ارتفاع های متناظر این دو شکل برابر است با:

الف) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $\frac{2}{9}$

حل: گزینه الف صحیح است.

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \quad (\text{نسبت تشابه})$$

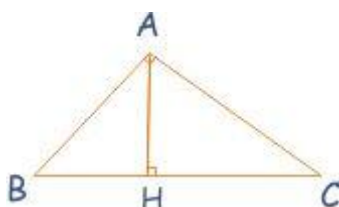
۴- نقشه ی هر مکان با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آن ها را مقیاس نقشه می گویند

$$\text{مقیاس} = \frac{\text{اندازه دو نقطه روی نقشه}}{\text{اندازه دو نقطه در طبیعت}}$$

۵- دو مربع دلخواه با هم متشابه هستند. دو مستطیل دلخواه متشابه نیستند، چون ممکن است اضلاع آن ها متناسب نباشند. دو لوزی دلخواه متشابه نیستند، دو لوزی که یک زاویه ی مساوی داشته باشند، متشابهند.

پاسخ : تست ۱ :

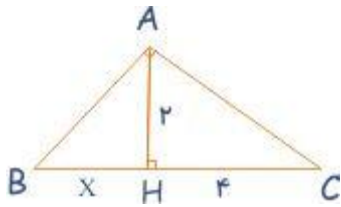
در مثلث ABC ، $BH=3\text{cm}$ و $CH=9\text{cm}$ است. اندازه ی AB برابر است با:



الف) $6\sqrt{6}$ (ب) $\sqrt{27}$ (ج) $2\sqrt{12}$ (د) ۶

پ تست ۲ : پاسخ

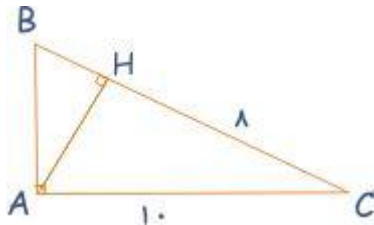
در شکل مقابل مقدار X برابر است با:



- (الف) ۱ (ب) ۲ (ج) $2\sqrt{2}$ (د) ۴

پ تست ۲ : پاسخ

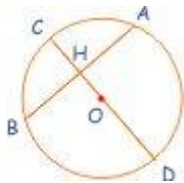
در شکل مقابل مساحت مثلث ABC برابر است با:



- (الف) ۳۴ (ب) $24/5$ (ج) $27/5$ (د) ۳۷

پ تست ۴ : پاسخ

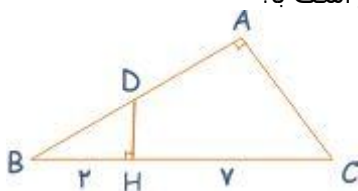
در شکل مقابل $AH=2$ ، $BH=2$ ، $CH=1$ باشد ، اندازه ی شعاع دایره برابر است با:



- (الف) ۲ (ب) $2/5$ (ج) $2/5$ (د) ۲

پ تست ۵ : پاسخ

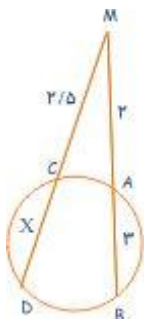
در شکل مقابل D وسط AB است . با توجه به اندازه های داده شده AB برابر است با:



- (الف) $2\sqrt{3}$ (ب) ۶ (ج) $2\sqrt{5}$ (د) ۳

پ تست ۶ : پاسخ

در شکل مقابل اندازه ی پاره خط CD کدام است؟



- (الف) $5/3$ (ب) $6/5$ (ج) $3/2$ (د) $12/5$

پ تست ۷ : پاسخ

در شکل زیر ضلع مربع بزرگ ۱۴ می باشد و از چهار مربع مساوی تشکیل شده است . اندازه ی Y کدام است؟



$$\frac{20}{3} \text{ (د)}$$

$$6/5 \text{ (ج)}$$

$$\frac{34}{5} \text{ (ب)}$$

$$6 \text{ (الف)}$$

پاسخ : تست ۸ :

طول اضلاع مثلثی ۱۲ و ۱۷ و ۲۱ سانتی متر است.

اگر این مثلث با مثلث دیگری که محیط آن ۲۰ سانتی متر است، متشابه باشد، طول کوچکترین ضلع مثلث جدید چند سانتی متر است؟

$$5/8 \text{ (د)}$$

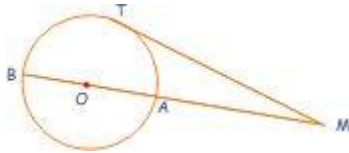
$$4/2 \text{ (ج)}$$

$$4/5 \text{ (ب)}$$

$$4/8 \text{ (الف)}$$

پاسخ : تست ۹ :

با توجه به شکل مقابل طول مماس $MT = 8\text{cm}$ و $MA = 4\text{cm}$ و O مرکز دایره است. شعاع دایره چقدر است؟



$$12 \text{ (د)}$$

$$8 \text{ (ج)}$$

$$6 \text{ (ب)}$$

$$4 \text{ (الف)}$$

پاسخ : تست ۱۰ :

در نقشه ی دیواری جغرافیایی ایران فاصله دو روستا در جنوب ایران ۲۰ سانتی متر است. اگر روی نقشه از این دو نقطه به تهران وصل کنیم زاویه 4° بوجود می آید. فاصله واقعی و زاویه دید واقعی آن دو منطقه از تهران کدام یک از جوابهای زیر می باشد.

(مقیاس نقشه $\frac{1}{10000}$)

$$20 \text{ کیلومتر و } 40^\circ \text{ (د)}$$

$$2 \text{ کیلومتر و } 4^\circ \text{ (ج)}$$

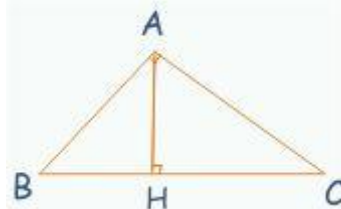
$$20 \text{ کیلومتر و } 4^\circ \text{ (ب)}$$

$$2 \text{ کیلومتر و } 40^\circ \text{ (الف)}$$

جواب تست ها

پاسخ : تست ۱ :

در مثلث ABC , $BH = 3\text{cm}$ و $CH = 9\text{cm}$ است. اندازه ی AB برابر است با:



$$6 \text{ (د)}$$

$$2\sqrt{12} \text{ (ج)}$$

$$\sqrt{27} \text{ (ب)}$$

$$6\sqrt{6} \text{ (الف)}$$

حل: گزینه ی د صحیح است.

$$AB^2 = BC \cdot BH \Rightarrow AB^2 = 12 \times 3 = 36 \Rightarrow AB = \sqrt{36} = 6$$

پاسخ : تست ۲ :

در شکل مقابل مقدار X برابر است با:

د) ۴

ج) $2\sqrt{2}$

ب) ۲

الف) ۱

حل: گزینه ی الف صحیح است.

$$AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow 2^2 = x \times 4 \Rightarrow 4 = 4x \Rightarrow x = 1$$

پ تست ۳:

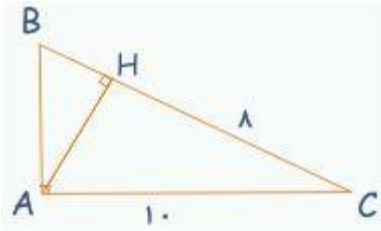
در شکل مقابل مساحت مثلث ABC برابر است با:

الف) ۲۴

ب) ۲۴/۵

ج) ۲۷/۵

د) ۳۷



حل: گزینه ی ج صحیح است.

$$* AC^2 = BC \cdot CH \Rightarrow 10^2 = BC \times 8 \Rightarrow BC = \frac{100}{8} = 12.5$$

$$* AH^2 = BH \cdot HC \Rightarrow AH^2 = 4.5 \times 8 \Rightarrow AH^2 = 36 \Rightarrow AH = 6$$

$$BH = 12.5 - 8 = 4.5$$

$$* S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{1}{2} \times 6 \times 12.5 = 37.5$$

تذکر: مقدار AH را به کمک رابطه ی فیثاغورس نیز می توان بدست آورد.

پ تست ۴:

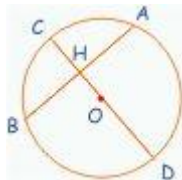
در شکل مقابل $CH=1$ ، $BH=2$ ، $AH=3$ می باشد، اندازه ی شعاع دایره برابر است با:

د) ۲

ج) ۲/۵

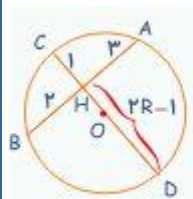
ب) ۲/۵

الف) ۳



حل: گزینه ی ج صحیح است.

اگر شعاع دایره باشد: $HD = 2R - 1$ می دانیم



$$AH \times HB = CH \times HD$$

$$\Rightarrow 3 \times 2 = 1 \times (2R - 1)$$

$$\Rightarrow 6 = 2R - 1$$

$$\Rightarrow 2R = 7 \Rightarrow R = 3.5$$

پ تست ۵:

در شکل مقابل D وسط AB است . با توجه به اندازه های داده شده AB برابر است با:

A

- الف) $2\sqrt{3}$ ب) 6 ج) $3\sqrt{5}$ د) 2

حل: گزینه ی ب درست است.

چون D وسط پاره خط AB قرار دارد

اندازه ی پاره خط AB را $2x$ فرض می کنیم. یعنی $BD = x$ و $AB = 2x$

$$\left(\begin{array}{l} \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \text{ در هر دو مشترک} \end{array} \right) \Rightarrow \triangle BHD \sim \triangle BAC$$

(تناسب اضلاع متناظر) $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{DH}{AC} = \frac{BH}{AB}$

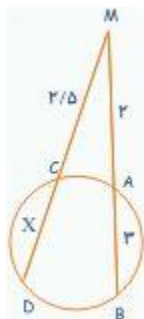
$$\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{DH}{AC} = \frac{2}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{2}{2x}$$

خاصیت طریق وسطین $\Rightarrow 2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow AB = 2 \times 3 = 6$

پ تست 6:

در شکل مقابل اندازه ی پاره خط CD کدام است؟



د) $\frac{12}{5}$

ج) $\frac{3}{2}$

ب) $\frac{6}{5}$

الف) $\frac{5}{3}$

حل: گزینه ی ج صحیح است.

از رابطه ی $MA \times MB = MC \times MD$ استفاده می کنیم.

$$\Rightarrow 2 \times 5 = \frac{2}{5} \times (\frac{2}{5} + x)$$

$$\Rightarrow 10 = \frac{2}{5} \times (\frac{2}{5} + x)$$

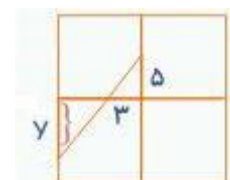
$$\Rightarrow 10 = \frac{6}{25} + \frac{2}{5}x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{75} = \frac{2}{5}x$$

$$\Rightarrow x = \frac{3/75}{2/5} = \frac{3}{2}$$

پ تست 7:

در شکل زیر ضلع مربع بزرگ 14 می باشد و از چهار مربع مساوی تشکیل شده است. اندازه ی Y کدام است؟



د) $\frac{20}{3}$

ج) $\frac{7}{5}$

ب) $\frac{34}{5}$

الف) 6

حل: گزینه ی د صحیح است.

مطابق شکل زیر و با توجه به تشابه دو مثلث هاشور خورده می توان نوشت:

$$\frac{Y}{14} = \frac{Y}{14}$$

پ تست ۸:

طول اضلاع مثلثی ۱۲ و ۱۷ و ۲۱ سانتی متر است.

اگر این مثلث با مثلث دیگری که محیط آن ۲۰ سانتی متر است، متشابه باشد، طول کوچکترین ضلع مثلث جدید چند سانتی متر است؟

(د) ۵/۸

(ج) ۴/۲

(ب) ۴/۵

(الف) ۴/۸

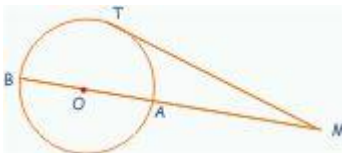
حل: گزینه ی الف صحیح است.

نسبت تشابه دو مثلث با نسبت محیط ها برابر است:

$$\frac{12+17+21}{X+Y+Z} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow \frac{12}{X} = \frac{5}{2} \Rightarrow X = \frac{2 \times 12}{5} = \frac{24}{5} = 4/8$$

پ تست ۹:

با توجه به شکل مقابل طول مماس $MT = 8\text{cm}$ و $MA = 4\text{cm}$ و O مرکز دایره است. شعاع دایره چقدر است؟



(د) ۱۲

(ج) ۸

(ب) ۶

(الف) ۴

حل: گزینه ی ب صحیح است.

از رابطه ی $MT^2 = MA \times MB$ استفاده می کنیم.

$$\Rightarrow 8^2 = 4 \times MB \Rightarrow 64 = 4 \times MB$$
$$\Rightarrow MB = \frac{64}{4} = 16 \Rightarrow AB = 16 - 4 = 12$$
$$\Rightarrow 12 \div 2 = 6 \text{ شعاع دایره}$$

پ تست ۱۰:

در نقشه ی دیواری جغرافیایی ایران، فاصله دو روستا در جنوب ایران ۲۰ سانتی متر است. اگر روی نقشه از این دو نقطه به تهران وصل کنیم زاویه 2° بوجود می آید. فاصله واقعی و زاویه دید واقعی آن دو منطقه از تهران کدام یک از جوابهای زیر می باشد.

(مقیاس نقشه $\frac{1}{10000}$)

(ب) ۲۰ کیلومتر و 2° درجه

(د) ۲۰ کیلومتر و 40° درجه

(الف) ۲ کیلومتر و 40° درجه

(ج) ۲ کیلومتر و 2° درجه

حل: گزینه ج صحیح است.

نقشه هر مکانی با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه مقیاس نقشه است.

$$\frac{1}{10000} = \frac{20}{X} \Rightarrow X = 20 \times 10000 = 200000 \text{ cm}$$

$$200000 \text{ cm} = 2 \text{ km}$$

می دانیم:

در شکل های متشابه زاویه ها نظیر به نظیر با هم مساویند، بنابراین گزینه ی (ج) صحیح است.

آدرس لینک صفحه : www.olympiadelmi.ir/riazi/3/17/riazi-3-16.htm

اجرا و پشتیبانی توسط مؤسسه فناوری اطلاعات کاشف